

大回归模型的自适应学习

戴瑞芬¹ 王芳¹ 郭雷²

摘 要 随着信息技术的快速发展,特别是计算能力和数据收集能力的持续提升,利用大参数模型对复杂场景进行建模已成为显著的发展趋势。然而,关于一般反馈输入下此类模型的学习问题,在控制系统领域却鲜有研究。鉴于此,针对饱和观测下的大回归模型,设计一种在线扩展型自适应学习算法。该算法可随着新数据的增加自动更新算法维数和计算结果,在无需存储历史数据的前提下,实现学习结果的动态调整与输出的实时预测。具体而言,在一般的非持续激励数据条件下证明了所提出算法的收敛性,该结果可以适用于一般反馈控制系统。此外,在无需任何数据激励条件的情况下,证明了所提出算法的预测“遗憾”具有良好的收敛性。最后,基于真实的故意伤害罪判决数据开展司法量刑预测实验,检验了所提出算法的计算效率和预测精度。

关键词 自适应学习, 大回归模型, 收敛性理论, 一般数据条件, 饱和观测, 司法量刑

引用格式 戴瑞芬, 王芳, 郭雷. 大回归模型的自适应学习. 自动化学报, 2025, 51(10): 2256–2268

DOI 10.16383/j.aas.c250286 **CSTR** 32138.14.j.aas.c250286

Adaptive Learning of Large Regression Models

DAI Rui-Fen¹ WANG Fang¹ GUO Lei²

Abstract With the rapid development of information technology and the continuous improvement of computational power and data collection capability, modeling complex scenarios using large parameter models has become a significant development trend. However, the learning problems of such models under general feedback inputs still remain lacking in the control system field. In view of this, we design an online adaptive learning algorithm with expanding dimension for large regression models under saturated observations. This algorithm can automatically update both algorithm dimension and computation results as new data increases, enabling dynamic adjustment of learning outcomes and real-time prediction of outputs without storing historical data. Specifically, we prove the convergence of the proposed algorithm under general non-persistent excitation data conditions, making it applicable to general feedback control systems. Moreover, the good convergence of the prediction “regrets” of the proposed algorithm is also proved without requiring any excitation data conditions. Finally, we conduct judicial sentencing prediction experiments based on real-world criminal judgment data for intentional injury cases, validating the computational efficiency and prediction accuracy of the proposed algorithm.

Key words Adaptive learning, large regression models, convergence theory, general data conditions, saturated observations, judicial sentencing

Citation Dai Rui-Fen, Wang Fang, Guo Lei. Adaptive learning of large regression models. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(10): 2256–2268

随着信息技术的迅猛发展,特别是计算能力和

数据收集能力的显著提升,大参数模型在众多领域得到广泛应用,尤其是近几年发展迅猛的大语言模型^[1–2]。此类模型通常包含大量乃至无穷的未知参数,能够更加有效地刻画复杂系统的动态特性和潜在规律。本文将考虑一类具体的大参数模型称为大回归模型。这类模型能够描述现实世界中许多无穷阶系统,将非参数问题转化为参数化问题来处理,将某些非凸优化问题转化为凸优化问题来研究,甚至还能处理某些传统框架下难以应对的有限阶系统问题。因此,对大回归模型进行相关算法设计与理论研究具有重要意义。

特别地,在众多复杂动力系统中,数据的固有属性以及观测器的测量局限常常影响输出观测的完

收稿日期 2025-06-30 录用日期 2025-08-28

Manuscript received June 30, 2025; accepted August 28, 2025

国家自然科学基金(T2293773, 72371145, 12288201), 国家重点研发计划(2024YFC3307200), 山东省泰山学者专项经费(tsqn202211004)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (T2293773, 72371145, 12288201), National Key Research and Development Program of China (2024YFC3307200), and Special Funds for Taishan Scholars Project of Shandong Province, China, (tsqn202211004)

本文责任编辑 杨莹

Recommended by Associate Editor YANG Ying

1. 山东大学数据科学研究院 济南 250100 2. 中国科学院数学与系统科学研究院系统控制重点实验室 北京 100190

1. Data Science Institute, Shandong University, Jinan 250100
2. Key Laboratory of Systems and Control, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

整性, 饱和观测数据在实际应用中普遍存在. 此类观测数据往往只能反映输出信号的部分信息: 当输出位于某一可观测区间内时, 可被精确测量, 而一旦超出该区间, 观测值则会“饱和”, 即被限制在区间边界. 饱和输出观测数据的存在使得即便对于经典的有限阶线性回归系统, 包含输出的回归向量也无法完整获取. 因此, 传统的系统辨识方法难以适用, 而有必要发展适用于此类情形的大回归模型辨识方法.

进一步, 尽管机器学习等极大推动了自动化与智能化进程, 目前相关理论与技术仍面临诸多困难与挑战: 首先, 传统的机器学习计算方法与理论主要基于统计学范式, 通常要求输入数据满足独立同分布 (Independent and identically distributed, i.i.d.) 或平稳遍历等理想化假设, 这些假设在可进行模拟实验设计的理想环境中或许是可行的, 但在许多真实世界的应用场景中却难以验证或满足. 尤其是在带有反馈回路的复杂动态系统中, 输入数据的性质通常由复杂的非线性动力学方程所决定, 其远不满足独立性和平稳性等经典统计学假设^[3-5]. 其次, 在实际机器学习任务中, 海量数据随时间不断累积, 为计算设备带来极大的存储压力. 尤其是针对大规模的学习任务, 庞大的存储需求导致数据存储成本急剧上升, 可能会降低整个系统的计算效率与响应速度.

因此, 在饱和输出观测和更一般输入数据条件下建立大回归模型的学习方法和理论, 并在不事先存储所有数据的前提下实现自适应学习的目的, 成为重要的研究方向.

数据是信息的载体, 是经验的具体体现, 也是建模与学习的基础. 如前所述, 饱和观测数据普遍存在, 其广泛存在于人工智能^[6-8]、经济学^[9-11]、生物医学^[12-13] 以及社会系统^[14-15] 等各个应用领域. 例如, 在机器学习中的线性整流函数 (Rectified linear unit, ReLU) 神经元模型中, 神经元激活函数值在负区间内将被置零, 难以观测到精确信息^[6-8]; 在经济学中的 Tobit 模型中, 消费者的购买能力在未发生购买行为时无法被完整观测^[9-11]; 在生物医学中的生存分析问题中, 个体的生存时间若超出跟踪区间则无法被精确测量^[12-13]. 近年来, 随着我国智慧法院工程的持续推进以及智能审判辅助系统的深入应用, 饱和观测数据成为智能司法量刑预测中建模与分析的重要对象. 由于我国法律体系中对刑期判决存在明确的法定刑区间约束, 量刑数据表现出典型的饱和观测特性: 对于根据量刑情节调节后低于或超过相应法定刑区间的案件, 其宣告刑应限定在法定刑区间内^[14]. 在本文的实验部分将进一步探讨所提出模型算法在司法量刑计算中的具体应用.

尽管饱和观测数据的存在使原本结构简单的线性系统转变为更为复杂的非线性系统, 但在过去十余年中, 针对饱和观测数据的建模与估计问题, 系统辨识领域仍涌现出大量研究成果^[16-24].

文献 [16] 针对二值观测情形提出基于经验测度的参数辨识方法, 并在输入信号满足周期性的条件下建立算法的强一致性理论结果. 文献 [17-19] 提出一类基于一阶梯度信息的自适应辨识算法, 并在某些强持续激励 (Persistent excitation, PE) 条件下对其收敛性等性质进行系统分析. 文献 [20] 针对具有饱和观测特性的逻辑回归模型, 设计自适应牛顿型辨识算法, 并在 i.i.d. 数据假设下给出其收敛性结论. 近年来, 文献 [21] 针对二值观测情形, 提出拟牛顿型自适应辨识算法, 并结合李雅普诺夫函数与鞅方法, 在一般的非持续激励 (Non-persistent excitation, Non-PE)^[25] 条件下证明了参数估计的强一致性. 随后, 文献 [22] 针对饱和观测情形, 提出两阶段拟牛顿型递推算法, 在 Non-PE 条件下对算法的渐近与非渐近性能进行理论分析, 同时将该算法应用于司法量刑计算中^[14]. 此外, 针对无限阶脉冲响应 (Infinite impulse response, IIR) 系统, 文献 [23] 基于扩展截尾的随机逼近算法 (Stochastic approximation algorithms with expanding truncations, SAAWET) 对随机维纳系统中的未知参数进行辨识, 但需假设输入信号服从 i.i.d. 高斯分布. 文献 [24] 则针对二值观测场景, 设计一种拟牛顿型辨识算法, 并在 Non-PE 条件下建立其收敛性理论.

可以看出, 对于饱和观测下的学习和预测问题, 面向一般反馈输入下大回归模型的相关研究仍然较少, 且即使是针对结构较为简单的有限脉冲响应系统, 现有理论结果也常常依赖于 PE 条件, 甚至要求输入数据满足独立性或周期性等理想化假设. 事实上, 针对完全观测情形下的大回归模型, 系统辨识领域已取得诸多重要进展^[26-30]. 文献 [26] 采用极大似然算法对未知参数进行估计, 但此时输入数据仍需满足平稳性假设. 文献 [29] 通过建立双指标鞅的极限理论, 研究 $ARX(\infty)$ 模型的参数估计问题, 并首次针对该模型在适用于一般反馈输入的 Non-PE 条件下建立最小二乘算法的强一致性. 随后, 文献 [30] 对文献 [29] 中的双指标鞅估计理论进行推广和改进, 并考虑了参数与阶数均未知的非平稳 ARMAX (Autoregressive moving average with extra input) 模型的估计问题.

近期, 文献 [31] 基于文献 [29-30] 的理论和方法, 针对饱和观测下的大回归模型提出一种拟牛顿型辨识算法, 并在 Non-PE 条件下对该算法的辨识与预测性能进行理论分析. 然而, 该算法缺乏自适应机制, 在处理大规模高维数据时可能面临存储需

求大、计算效率低等一系列挑战. 因此, 为克服上述研究中 (如文献 [29–31]) 算法的存储与计算瓶颈, 本文针对饱和观测条件下的大回归模型, 设计一种高效的自适应学习算法, 并在适用于反馈输入信号的一般数据条件下, 建立算法的自适应辨识与预测理论. 本文的主要贡献如下:

1) 设计一种在线扩展型自适应学习算法高效估计饱和观测下的大回归模型的未知参数. 该算法不仅能够随着新数据的增加自动更新算法维数, 且适应动态流数据环境, 在无需存储历史数据的前提下实现在线学习与预测, 在时间和空间复杂度上显著优于现有相关方法, 适用于大规模高维数据的快速响应与实时处理.

2) 在一般的非持续激励数据条件下, 利用随机李雅普诺夫函数方法及鞅估计理论, 得到所提出算法的收敛性和收敛速度. 该结果无需输入数据满足 i.i.d. 或平稳遍历性等严苛假设, 且适用于随机反馈控制系统. 此外, 在无需任何数据激励的条件下, 通过对输出与观测的预测“遗憾”的收敛性证明, 验证了所设计的自适应预测器具备良好性能.

3) 基于真实的故意伤害罪判决数据, 开展司法量刑预测实验, 通过分析预测精度随参数规模递增的变化趋势, 为量刑预测任务中的较优参量选取提供有效参考. 此外, 通过与文献 [31] 中算法的对比实验, 直观展示了本文算法在保证精准量刑预测的同时显著降低存储开销并提升运算效率.

本文的结构安排如下: 第 1 节介绍饱和观测下大回归模型的具体形式, 并引入本文所需的基本符号与假设条件; 第 2 节提出一种自适应投影学习算法, 用于估计模型中的未知参数; 第 3 节给出本文主要的理论结果; 第 4 节给出相关结果的详细证明; 第 5 节基于实际司法判决数据开展量刑预测实验, 验证所提出算法的预测性能与计算效率; 第 6 节对全文进行总结, 并就未来的研究方向进行展望.

1 数学模型

1.1 饱和观测下的大回归模型

考虑下列饱和观测下具有无穷参量的随机回归模型:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i u_{k,i} + v_{k+1}, \quad k \geq 0 \quad (1)$$

$$z_{k+1} = S_k(y_{k+1}) = \begin{cases} L_k, & y_{k+1} < l_k \\ y_{k+1}, & l_k \leq y_{k+1} \leq n_k \\ N_k, & y_{k+1} > n_k \end{cases} \quad (2)$$

其中, $u_{k,i} \in \mathbf{R}$, $y_k \in \mathbf{R}$, $z_k \in \mathbf{R}$ 和 $v_k \in \mathbf{R}$ 分别表示系统的输入、输出、输出观测以及随机噪声. 不失一般性, 假设对于任意的 $k < 0$, $v_k = 0$, $u_{k,i} = 0$ 对所有的 $1 \leq i < \infty$ 均成立. $S_k(\cdot)$ 为已知的饱和观测函数, 且 $\{l_k, n_k, L_k, N_k\}$ 为已知的随机序列. 未知参数 $b_i \in \mathbf{R}$ 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < \infty$.

注 1. 模型 (1) 在参数辨识中具有重要意义^[31]. 一方面, 当式 (1) 中的 $u_{k,i}$ 取为 u_{k-i+1} 时, 模型退化为饱和观测下的 IIR 模型, 其在传统包含输出的有限维回归向量无法完整获取的情况下, 依然能够进行有效的估计与预测; 另一方面, 该模型可视为一个内层参数经过预训练固定的单隐层无限宽度神经网络. 此外, 这类模型不仅能够刻画现实世界中的诸多无穷阶系统, 还可将某些非凸优化问题转化为凸优化问题进行研究, 例如第 5 节所探讨的司法量刑问题.

注 2. 饱和观测下的大回归模型中定义的饱和观测值在实际中具有广泛应用^[22]. 当 $L_k = l_k = 0$ 且 $N_k = n_k = \infty$ 时, $S_k(\cdot)$ 退化为机器学习中常见的 ReLU 激活函数; 当 $L_k = l_k = n_k = 0$ 且 $N_k = 1$ 时, $S_k(\cdot)$ 退化为分类任务中常用的二值函数^[21]; 当 $L_k = l_k = -\infty$ 且 $N_k = n_k = +\infty$ 时, 对应于经典的完全输出观测情形^[32].

此外, 如果引入未知参数向量

$$\Theta = [b_1, b_2, b_3, \dots]^T \in \mathbf{R}^{\infty} \quad (3)$$

以及相应的回归向量

$$\Phi_k = [u_{k,1}, u_{k,2}, u_{k,3}, \dots]^T \in \mathbf{R}^{\infty} \quad (4)$$

则式 (2) 中的 z_k 可简洁地表示为

$$z_{k+1} = S_k(\Theta^T \Phi_k + v_{k+1}) \quad (5)$$

本文的主要目标是在一般的输入数据条件下, 提出高效的自适应学习算法, 以估计饱和观测下的大回归模型中的未知参数, 并设计精准的自适应预测器对模型输出或观测进行预测, 同时建立相应的理论. 为此, 首先引入一些基本的符号和假设.

1.2 符号与假设

在本文中, 记 $\|\cdot\|$ 表示向量或矩阵的欧几里得范数. 对于任意无限维向量 $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T$, 其 l_{α} 范数定义为 $\|x\|_{\alpha} = \{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\alpha}\}^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha = 1, 2$. 对称矩阵 X 的最大特征值和最小特征值分别记为 $\lambda_{\max}\{X\}$ 和 $\lambda_{\min}\{X\}$. 此外, 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为两个实数序列, 且 $b_n > 0$, $a_n = o(b_n)$ 表示当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $a_n/b_n \rightarrow 0$; $a_n = O(b_n)$ 则表示存在常数 $C > 0$, 使得对于所有 $n > 0$, 有 $|a_n|/b_n \leq C$; 符号 a.s. (Almost surely) 表示在概率意义下几乎处处成立.

假设 1. 令 $\{\mathcal{F}_k\}$ 为一非降的 σ -代数序列. 饱和函数 (2) 中的已知量 l_k, n_k, L_k, N_k 均适应于 $\mathcal{F}_k$ 且满足

$$l_k - c \leq L_k \leq l_k \leq n_k \leq N_k \leq n_k + c, \text{ a.s.} \quad (6)$$

其中, c 为一非负有界的随机变量.

实际上, 假设 1 是一种十分自然的设定, 用以保证饱和函数 $S_k(\cdot)$ 的单调非降性.

假设 2. 对于任意的 $k > 0$, 随机噪声 $v_k \in \mathcal{F}_k$ 为鞅差序列, 且满足

$$\sup_{k \geq 0} \mathbb{E}[|v_{k+1}|^4 | \mathcal{F}_k] < \infty, \text{ a.s.} \quad (7)$$

此外, v_{k+1} 在 $\mathcal{F}_k$ 条件下的条件概率密度函数有界. 条件期望函数 $G_k(x) = \mathbb{E}[S_k(x + v_{k+1}) | \mathcal{F}_k]$ 可微, 且其导数 $G'_k(x)$ 满足

$$0 < \inf_{|x| \leq M, k \geq 0} G'_k(x) \leq \sup_{|x| \leq M, k \leq 0} G'_k(x) < \infty \quad (8)$$

其中, $M > 0$ 为任一有界常数.

注 3. 记噪声 v_{k+1} 在 $\mathcal{F}_k$ 条件下的条件概率密度函数和条件分布函数分别为 $f_k(\cdot)$ 和 $F_k(\cdot)$, 则假设 2 中的函数 $G_k(x)$ 及其导数 $G'_k(x)$ 的具体表达式如下:

$$G_k(x) = \int_{l_k}^{n_k} t f_k(t - x) dt + L_k F_k(l_k - x) + N_k [1 - F_k(n_k - x)] \quad (9)$$

$$G'_k(x) = F_k(n_k - x) - F_k(l_k - x) + (l_k - L_k) f_k(l_k - x) + (N_k - n_k) f_k(n_k - x) \quad (10)$$

假设 3. 对任意 $k \geq 1$, 输入 $u_{k,i}$ 适应于 $\mathcal{F}_k$ 对任意 $i \geq 0$ 均成立, 且存在常数 $M > 0$, 使得

$$\sup_{0 \leq i, k < \infty} |u_{k,i}| < M < \infty, \text{ a.s.} \quad (11)$$

由假设 3 可知, 存在正有界序列 $\{M_k, k \geq 0\}$ 使得对任意的 $k \geq 0$, 有

$$\sup_{0 \leq i < \infty} |u_{k,i}| < M_k < M, \text{ a.s.} \quad (12)$$

此外, 为便于分析, 现引入以下将在下文中多次使用的记号:

$$\tilde{\theta}_k = \theta(k) - \hat{\theta}_k \quad (13)$$

$$w_{k+1} = z_{k+1} - G_k(\Phi_k^T \Theta) \quad (14)$$

$$\psi_k = G_k(\Phi_k^T \Theta) - G_k(\bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1}) \quad (15)$$

$$\delta_k = \left(\sum_{i=p_{k-1}+1}^{\infty} |b_i| \right)^2 \quad (16)$$

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n \delta_k^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$\varepsilon_k = \Phi_k^T \Theta - \bar{\phi}_k^T \theta(k-1) \quad (18)$$

其中, $\theta(k)$ 由式 (19) 定义, $\bar{\phi}_k = [u_{k,1}, \dots, u_{k,p_{k-1}}]^T \in \mathbf{R}^{p_{k-1}}$ 表示下文式 (20) 中向量 ϕ_k 的前 p_{k-1} 个分量组成的子向量.

2 自适应学习算法

令 p_k 为一非降正整数列, 满足 $c_1 \lfloor \log(k+e) \rfloor \leq p_k \leq c_2 \lfloor (k+1)^\alpha \rfloor$ 对任意 $k \geq 0$ 均成立, 其中 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 为常数且 c_1 充分大, $\alpha \in (0, 1)$. 这里, 符号 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 对任意的 $k \geq 0$, 记

$$\theta(k) = [b_1, \dots, b_{p_k}]^T \in \mathbf{R}^{p_k} \quad (19)$$

且

$$\phi_k = [u_{k,1}, \dots, u_{k,p_k}]^T \in \mathbf{R}^{p_k} \quad (20)$$

未知参数 $\theta(k)$ 在 k 时刻的估计 $\hat{\theta}_k$ 记为

$$\hat{\theta}_k = [\hat{b}_{1,k}, \dots, \hat{b}_{p_k,k}]^T \in \mathbf{R}^{p_k} \quad (21)$$

受文献 [4] 的启发, 首先构造如下的投影区域 $D_k \subseteq \mathbf{R}^{p_k}$:

$$D_k = \{x \in \mathbf{R}^{p_k} : \|x\|_1 \leq \min\{d_k, \alpha_k\}\} \quad (22)$$

其中, $d_k = \sqrt{h_k \left(\frac{g_k(0)}{\alpha_k} \right) + 1}$. 这里对于任意的 $k > 0$, $g_k(\cdot)$ 及其反函数 $h_k(\cdot)$ 分别定义为

$$g_k(t) = \min \left\{ \inf_{|x| \leq t, k \geq 0} G'_k(x), \frac{1}{2M_k^2 p_k \sup_{|x| \leq t, k \geq 0} G'_k(x) + 1} \right\}, t \geq 0$$

及 $h_k(t) = \inf\{s \geq 0 : g_k(s) = t\}$, $0 < t \leq g_k(0)$. $\{\alpha_k, k \geq 0\}$ 为递增的正序列满足 $\alpha_k = o(k^\eta)$, $\alpha_0 \geq 1$ 且 $\alpha_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, 其中, $\eta \in (0, 1/2)$ 为任取的常数.

式 (22) 中对投影区域内向量范数的上界加以限制, 旨在确保下文算法中所构造的自适应增益 β_k 趋于 0 的速率以及式 (15) 中定义的 ψ_k 趋于 ∞ 的速率均在一定的可控范围内. 对于完全观测情形^[29-30], 由于 $G'_k(x)$ 为常数, 投影区域无须施加 d_k 的上界限制.

此处的投影区域 D_k 无需对未知参数所在的集合进行有界的先验假设^[4]. 事实上, 在实际应用中, 投影区域的构造可分为两种情况: 1) 若参数向量的上界未知, 则可采用式 (22) 中的构造方式; 2) 若已知未知参数向量存在先验上界 L , 则投影区域的范数上界可直接设置为 L , 即

$$\bar{D}_k = \{x \in \mathbf{R}^{p_k} : \|x\|_1 \leq L\} \quad (23)$$

对上述定义的区域 D_k 或 $\bar{D}_k$ 及任一已知的正定矩阵 Q , 可以定义相关的投影算子为

$$\Pi_Q^{D_k}\{x\} = \arg \min_{\omega \in D_k} \|x - \omega\|_Q, \quad \forall x \in \mathbf{R}^{p_k} \quad (24)$$

其中, 范数 $\|\cdot\|_Q$ 定义为

$$\|y\|_Q = (y^T Q y)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall y \in \mathbf{R}^{p_k} \quad (25)$$

由投影算子的性质可知^[33]

$$\|\Pi_Q^{D_k}\{x\} - \Pi_Q^{D_k}\{y\}\|_Q \leq \|x - y\|_Q, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^{p_k} \quad (26)$$

基于上述投影算子, 本文提出一种在线扩展型自适应学习算法 (算法 1), 用于估计饱和和观测下的大回归模型中的未知参数, 并对模型的输出和观测进行预测. 该算法的核心思想在于: 随着时刻 k 的推进, 待估参数向量的长度 p_k 可自动且缓慢地扩展. 在这一设定下, 时刻 k 的参数估计向量的前 p_{k-1} 维可由前一时刻的估计值递推获得, 而新增维度的参数估计值则自动初始化为零. 当 p_k 增长得足够缓慢时, 算法便有充足的时间通过递推精确估计前段的主要参数, 从而提升整体估计的稳定性与准确性. 算法的具体形式如式 (27) ~ (30) 所示.

注 4. 相比于文献 [31] 中所提出的学习算法, 算法 (27) ~ (30) 的主要优势在于其高效的自适应性. 具体而言, 算法能够随着数据量的增加自动调整未知参数向量的维数 p_k , 在无需存储海量数据的前提下实现对参数的在线更新与输出的实时预测. 这种特性不仅有效减少了存储需求, 还极大提升了运算效率, 尤其在处理大规模数据时, 能够显著提高算法的响应速度和实时性能.

表 1 展示了算法 (27) ~ (30) 与文献 [31] 中算法的复杂度对比, 其中 n 表示数据量. 可以看出, 本文提出的自适应学习算法 (算法 1) 在时间复杂度和空间复杂度方面均明显优于文献 [31] 中的算法 (算法 2). 随着数据规模 n 的增大, 算法 1 在计算效率和存储资源上的优势更加显著. 第 5 节将通过基于真实数据的实验进一步验证这一优势.

算法 1. 在线扩展型自适应学习算法

对于正整数 $k = 1, 2, 3, \dots$, 递推计算:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= I_{\{p_k=p_{k-1}\}} \cdot \Pi_{P_k}^{D_k} \left\{ \hat{\theta}_{k-1} + a_k \beta_k P_{k-1} \phi_k \cdot \right. \\ &\quad \left. [z_{k+1} - G_k(\bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1})] \right\} + \\ &I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \cdot \Pi_{P_k}^{D_k} \left\{ \hat{\theta}_{k-1} + a_k \beta_k P_{k-1}^\dagger \phi_k \cdot \right. \\ &\quad \left. [z_{k+1} - G_k(\bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1})] \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} P_k &= I_{\{p_k=p_{k-1}\}} \cdot \left\{ P_{k-1} - a_k \beta_k^2 P_{k-1} \phi_k \phi_k^T P_{k-1} \right\} + \\ &I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \cdot \left\{ P_{k-1}^\dagger - a_k \beta_k^2 P_{k-1}^\dagger \phi_k \phi_k^T P_{k-1}^\dagger \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$a_k = \frac{1}{\mu_k + \beta_k^2 \phi_k^T [I_{\{p_k=p_{k-1}\}} P_{k-1} + I_{\{p_k > p_{k-1}\}} P_{k-1}^\dagger] \phi_k} \quad (29)$$

$$\beta_k = \min \left\{ \underline{g}_k, \frac{1}{2 \bar{g}_k \phi_k^T [I_{\{p_k=p_{k-1}\}} P_{k-1} + I_{\{p_k > p_{k-1}\}} P_{k-1}^\dagger] \phi_k + 1} \right\} \quad (30)$$

其中, 式 (27) 中的 $\hat{\theta}_{k-1}^\dagger \in \mathbf{R}^{p_k}$ 取为 $[\hat{\theta}_{k-1}^T, 0, \dots, 0]^T$, 式 (27) ~ (30) 中的 $P_{k-1}^\dagger \in \mathbf{R}^{p_k \times p_k}$ 取为 $\begin{bmatrix} P_{k-1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{p_k-p_{k-1}} \end{bmatrix}$. 此外, $\underline{g}_k = \inf_{|x| \leq M_k d_k} G'_k(x)$, $\bar{g}_k = \sup_{|x| \leq M_k d_k} G'_k(x)$, 其中 d_k 在式 (22) 中给出. 式 (27) 中的 $\hat{\theta}_k \in \mathbf{R}^{p_k}$ 为在时刻 k 对 $\theta(k)$ 的自适应估计, 初始值 $\hat{\theta}_0 \in \mathbf{R}^{p_0}$ 可任意选取, 初始矩阵取为 $P_0 = I \in \mathbf{R}^{p_0 \times p_0}$. 式 (27) 中的投影算子 $\Pi_{P_{k-1}}^{D_k}(\cdot)$ 由式 (24) 定义, 其中 P_k^{-1} 为正定矩阵, 具体证明详见第 4 节. 式 (29) 中的 $\mu_k \in \mathcal{F}_k$ 且满足 $1 \leq \inf_{k \geq 0} \mu_k \leq \sup_{k \geq 0} \mu_k < \infty$.

表 1 算法复杂度分析对比

Table 1 Comparison of algorithm complexity analysis

维度	算法 1	算法 2 ^[31]
时间复杂度	$O(np_n^2)$	$O(n^2 p_n^2)$
空间复杂度	$O(p_n^2)$	$O(p_n^2)$

3 主要结果

定理 1. 在假设 1 ~ 3 下考虑饱和和观测下的大回归模型, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由算法 (27) ~ (30) 所产生的参数估计误差界有如下的渐近性质:

$$\begin{aligned} \|\Theta - \hat{\Theta}_n\|_2^2 &= \\ &O \left(\frac{p_n^2 \alpha_n^2 [p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n]}{\lambda_{\min}(n)} \right), \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\hat{\Theta}_n = [\hat{\theta}_n^T, 0, 0, \dots]^T \in \mathbf{R}^\infty$ 且 $\lambda_{\min}(n)$ 定义为

$$\lambda_{\min}(n) = \lambda_{\min} \left\{ I_{p_n} + \sum_{k=1}^n \tilde{\phi}_k(n) \tilde{\phi}_k^T(n) \right\} \quad (32)$$

这里

$$\tilde{\phi}_k(n) = [u_{k,1}, u_{k,2}, \dots, u_{k,p_k}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^{p_n} \quad (33)$$

推论 1. 在定理 1 的条件下, 若 $\alpha_n^2 = O(\log^\epsilon n)$, $0 < \epsilon < 1$, 且进一步取 $p_n = c_1 \lfloor \log(n+e) \rfloor$, $c_1 > 0$ 充分大, $|b_i| = O(\lambda^i)$, $i \geq 0$, $0 < \lambda < 1$ 或者 $p_n =$

$c_2 \lfloor n^\alpha \rfloor$, $|b_i| = O(i^{-a})$, $a > (1 + \alpha)/\alpha$, 则定理 1 的结果简化为

$$\|\Theta - \hat{\Theta}_n\|_2^2 = O\left(\frac{p_n^3 \log^{1+\epsilon} n}{\lambda_{\min}(n)}\right), \quad \text{a.s.} \quad (34)$$

注 5. 根据推论 1 可知, 若条件

$$p_n^3 \log^{1+\epsilon} n = o(\lambda_{\min}(n)), \quad \text{a.s.} \quad (35)$$

成立, 则参数估计值 $\hat{\Theta}_n$ 将几乎处处收敛到真实参数值 Θ . 事实上, 若系统 (1) 退化到有限阶系统情形, 即 p_n 取为常数 p , 条件 (35) 退化为 $\log^{1+\epsilon} n = o(\lambda_{\min}\{\sum_{k=1}^n \varphi_k \varphi_k^T\})$, 其中, $\varphi_k = [u_{k,1}, \dots, u_{k,p}]^T$, 这显然比传统的 PE 条件 $n = O(\lambda_{\min}\{\sum_{k=1}^n \varphi_k \varphi_k^T\})$ 要弱. 对于本文所研究的无穷阶系统, 可以类似定义 PE 条件^[29] 为

$$n = O(\lambda_{\min}(n)), \quad \text{a.s.} \quad (36)$$

当 $p_n = O(n^\alpha)$, $\alpha \in (0, 1/3)$ 时, 条件 (35) 比条件 (36) 弱得多, 是完全观测下的有限阶随机回归模型下最小二乘收敛性的最弱激励条件的推广. 具体而言, 条件 (35) 只需 $\lambda_{\min}(n)$ 相对于 $p_n^3 \log^{1+\epsilon} n$ 增长得稍快, 便足以保证算法的收敛性; 而条件 (36) 至少需要 $\lambda_{\min}(n)$ 与 n 具有同阶增长速率才能确保算法收敛. 值得注意的是, 条件 (35) 并不排除非独立、非平稳的输入数据, 且适用于随机反馈控制系统.

接下来分析自适应预测的准确性. 注意到对于任意的 $k > 0$, 式 (2) 中的饱和观测可改写为

$$z_{k+1} = S_k(\bar{\phi}_k^T \theta(k-1) + \varepsilon_k + v_{k+1}) \quad (37)$$

对式 (37) 两边取条件期望, 可得到 z_{k+1} 在均方意义下的最优预测, 即

$$E(z_{k+1} | \mathcal{F}_k) = G_k(\bar{\phi}_k^T \theta(k-1) + \varepsilon_k) \quad (38)$$

其中, $G_k(\cdot)$ 由假设 2 定义. 将式 (38) 中的未知参数 $\theta(k-1)$ 替换为其估计值 $\hat{\theta}_{k-1}$ 并忽略余项 ε_k , 可以得到如下对 z_k 的自适应预测器:

$$\hat{z}_{k+1} = G_k(\bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1}) \quad (39)$$

通常情况下, 最优预测 (38) 与自适应预测 (39) 之差定义为“遗憾”, 具体表达为

$$R_k^{(1)} = [E(z_{k+1} | \mathcal{F}_k) - \hat{z}_{k+1}]^2 = [\psi_k]^2 \quad (40)$$

类似于以上分析, 可对模型输出 y_{k+1} 的“遗憾”进行如下定义:

$$R_k^{(2)} = [E[y_{k+1} | \mathcal{F}_k] - \bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1}]^2 \quad (41)$$

定理 2 将说明, 上述自适应预测器具有良好的性能, 关于模型的观测和输出预测的平均“遗憾”在渐近意义下均将收敛至 0, 即 $\sum_{k=0}^n R_k^{(i)} = o(n)$,

a.s., $i = 1, 2$.

定理 2. 在假设 1 ~ 3 的条件下考虑饱和观测下的大回归模型, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 关于模型观测和输出预测的累积“遗憾”在几乎处处意义下分别具有如下上界:

$$\sum_{k=0}^n R_k^{(1)} = O\left(p_n^2 \alpha_n^2 [p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n]\right) \quad (42)$$

$$\sum_{k=0}^n R_k^{(2)} = O\left(p_n^2 \alpha_n^2 [p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n]\right) \quad (43)$$

注 6. 若将上述算法中的投影区域设置为式 (23) 中的 $\bar{D}_k$, 自适应增益 β_k 中的 $\underline{g}_k = \inf_{|x| \leq M_k L} G'_k(x)$, $\bar{g}_k = \sup_{|x| \leq M_k L} G'_k(x)$, 且 p_n 和 b_i 按照推论 1 的取法, 则定理 1 和定理 2 的结果可分别改写为

$$\|\Theta - \hat{\Theta}_n\|_2^2 = O\left(\frac{p_n \log n}{\lambda_{\min}(n)}\right), \quad \text{a.s.} \quad (44)$$

$$\sum_{k=0}^n R_k^{(1)} = O(p_n \log n), \quad \text{a.s.} \quad (45)$$

$$\sum_{k=0}^n R_k^{(2)} = O(p_n \log n), \quad \text{a.s.} \quad (46)$$

可见相较于文献 [31] 的理论结果, 本文算法在不加强估计收敛条件的前提下优化了预测“遗憾”的收敛速度, 主要得益于算法 (27) ~ (30) 的自适应机制, 使得无需考虑当前时刻 n 与参数估计迭代次数 k 之间的一致性问题. 相比之下, 本文算法能够更加方便地应用于自适应反馈控制系统, 并有效降低计算的复杂度.

此外, 当 p_n 取为有限阶系统阶数的上界时, 该结果与完全观测下针对线性随机回归模型的经典最小二乘算法的相关收敛性结果一致. 此时, 累积“遗憾”的渐近阶 $O(\log n)$ 为自适应预测的最优结果^[34].

4 主要结果的证明

4.1 两个引理及其证明

本节首先引入文献 [28] 中提出的一个关于鞅估计的基本引理.

引理 1. 设 $\{\omega_n, \mathcal{F}_n\}$ 为鞅差序列, $\{f_n, \mathcal{F}_n\}$ 为一适应序列. 若存在某个 $\alpha \in (0, 2]$, 使得

$$\sup_n E[|\omega_{n+1}|^\alpha | \mathcal{F}_n] < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (47)$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对任意的 $\eta > 0$, 有

$$\sum_{i=0}^n f_i \omega_{i+1} = O\left(s_n(\alpha) \log^{\frac{1}{\alpha} + \eta}(s_n^\alpha(\alpha) + e)\right), \text{ a.s. } (48)$$

其中, $s_n(\alpha) = (\sum_{i=0}^n |f_i|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

接下来, 证明一个关键引理, 其分析思路主要受文献 [4, 29, 32] 的启发.

引理 2. 若饱和观测下的大回归模型满足假设 1 ~ 3, 则存在整数 $k_0 > 0$, 使得算法 (27) ~ (30) 具有如下性质:

$$V_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k]^2 = V_{k_0} + O(p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n), \text{ a.s. } (49)$$

其中, $V_n = \tilde{\theta}_n^T P_n^{-1} \tilde{\theta}_n$, 且常数 $\gamma \in (0, 1/2)$.

证明. 由式 (22) 中 h_k 和 d_k 的定义可知, $d_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. 注意到 $\|\theta\|_1 = O(1)$, 根据式 (19) 以及式 (22) 中 D_k 的定义可知, 存在充分大的 $k_0 > 0$, 使得对任意 $k \geq k_0$, 有

$$\theta(k) \in D_k, \quad \|\theta\|_1 \leq d_{k_0}, \quad M \leq d_{k_0} \quad (50)$$

根据矩阵求逆公式及式 (28), P_k^{-1} 可表示为

$$P_k^{-1} = I_{\{p_k=p_{k-1}\}} P_{k-1}^{-1} + I_{\{p_k>p_{k-1}\}} P_{k-1}^{\dagger-1} + \mu_k^{-1} \beta_k^2 \phi_k \phi_k^T \quad (51)$$

此外, 由式 (51) 和 a_k 的定义可知

$$a_k P_k^{-1} [I_{\{p_k=p_{k-1}\}} P_{k-1} + I_{\{p_k>p_{k-1}\}} P_{k-1}^{\dagger-1}] \phi_k = \mu_k^{-1} \phi_k \quad (52)$$

对任意给定的 $k > k_0$, 当 $p_k > p_{k-1}$ 时, 令

$$\bar{\theta}(k) = [b_{p_{k-1}+1}, \dots, b_{p_k}]^T \in \mathbf{R}^{p_k-p_{k-1}} \quad (53)$$

$$\bar{\phi}_k = [u_{k, p_{k-1}+1}, \dots, u_{k, p_k}]^T \in \mathbf{R}^{p_k-p_{k-1}} \quad (54)$$

下面考虑随机李雅普诺夫函数 $V_k = \tilde{\theta}_k^T P_k^{-1} \tilde{\theta}_k$, $k \geq k_0$. 由式 (25) 和式 (26)、式 (14) 和式 (15) 以及式 (50) ~ (54), 可知

$$\begin{aligned} V_k &= \|\tilde{\theta}_k\|_{P_k^{-1}}^2 \leq I_{\{p_k>p_{k-1}\}} \cdot \\ &\left\| [\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)]^T - a_k \beta_k P_{k-1}^{\dagger} \phi_k [\psi_k + w_{k+1}] \right\|_{P_k^{-1}}^2 + \\ &I_{\{p_k=p_{k-1}\}} \cdot \left\| \tilde{\theta}_{k-1} - a_k \beta_k P_{k-1} \phi_k [\psi_k + w_{k+1}] \right\|_{P_k^{-1}}^2 = \\ &I_{\{p_k>p_{k-1}\}} \cdot \left\{ [\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)] P_{k-1}^{\dagger-1} [\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)]^T + \right. \\ &\mu_k^{-1} \beta_k^2 \{[\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)] \phi_k\}^2 - \\ &2a_k \beta_k [\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)] P_{k-1}^{\dagger} P_{k-1} \phi_k [\psi_k + w_{k+1}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_k^2 \beta_k^2 \phi_k^T P_{k-1}^{\dagger} P_{k-1}^{\dagger} \phi_k [\psi_k + w_{k+1}]^2 \Big\} + \\ &I_{\{p_k=p_{k-1}\}} \cdot \left\{ \tilde{\theta}_{k-1}^T P_{k-1}^{-1} \tilde{\theta}_{k-1} + \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_k]^2 - \right. \\ &2a_k \beta_k \tilde{\theta}_{k-1}^T P_{k-1}^{-1} P_{k-1} \phi_k [\psi_k + w_{k+1}] + \\ &a_k^2 \beta_k^2 \phi_k^T P_{k-1} P_{k-1}^{-1} P_{k-1} \phi_k [\psi_k + w_{k+1}]^2 \Big\} = \\ &I_{\{p_k>p_{k-1}\}} \cdot \left\{ V_{k-1} + \|\bar{\theta}(k)\|^2 + \right. \\ &\mu_k^{-1} \beta_k^2 \{[\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)] \phi_k\}^2 - \\ &2\mu_k^{-1} \beta_k [\tilde{\theta}_{k-1}^T, \bar{\theta}^T(k)] \phi_k (\psi_k + w_{k+1}) + \\ &\mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \phi_k^T P_{k-1}^{\dagger} \phi_k (\psi_k + w_{k+1})^2 \Big\} + \\ &I_{\{p_k=p_{k-1}\}} \cdot \left\{ V_{k-1} + \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_k]^2 - \right. \\ &2\mu_k^{-1} \beta_k \tilde{\theta}_{k-1}^T \phi_k (\psi_k + w_{k+1}) + \\ &\mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \phi_k^T P_{k-1} \phi_k (\psi_k + w_{k+1})^2 \Big\} \end{aligned} \quad (55)$$

令

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (1 + \frac{1}{d}) \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k]^2 - \\ &2\mu_k^{-1} \beta_k \tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k (\psi_k + w_{k+1}) + \\ &\mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k (\psi_k + w_{k+1})^2 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \xi_k &= \|\bar{\theta}(k)\|^2 + (1+d) \mu_k^{-1} \beta_k^2 (\bar{\theta}^T(k) \bar{\phi}_k)^2 - \\ &2\mu_k^{-1} \beta_k \bar{\theta}^T(k) \bar{\phi}_k (\psi_k + w_{k+1}) + \\ &\mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \|\bar{\phi}_k\|^2 (\psi_k + w_{k+1})^2 \end{aligned} \quad (57)$$

其中, $d > 0$ 为一常数. 注意到 $\phi_k = \bar{\phi}_k I_{\{p_k=p_{k-1}\}} + [\bar{\phi}_k^T, \bar{\phi}_k^T]^T I_{\{p_k>p_{k-1}\}}$, 由式 (55) ~ (57) 和基本不等式 $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2, \epsilon > 0$, 可知

$$V_k \leq V_{k-1} + I_{\{p_k=p_{k-1}\}} \Gamma_k + I_{\{p_k>p_{k-1}\}} (\Gamma_k + \xi_k) = V_{k-1} + \Gamma_k + I_{\{p_k>p_{k-1}\}} \xi_k \quad (58)$$

对式 (58) 左右两端同时从 k_0 到 n 求和, 可知

$$V_n \leq V_{k_0-1} + \sum_{k=k_0}^n \Gamma_k + \sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k>p_{k-1}\}} \xi_k \quad (59)$$

下面依次分析式 (59) 中的右端项. 根据微分中值定理, 由式 (13)、(15) 和 (18) 可知, 存在 $\xi_k \in (\min\{\Phi_k^T \Theta, \bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1}\}, \max\{\Phi_k^T \Theta, \bar{\phi}_k^T \hat{\theta}_{k-1}\})$, 使得

$$\psi_k = G'_k(\xi_k) [\bar{\phi}_k^T \tilde{\theta}_{k-1} + \varepsilon_k] \quad (60)$$

其中, $\varepsilon_k = \Phi_k^T \Theta - \bar{\phi}_k^T \theta(k-1)$ 由式 (18) 定义, 故有

$$|\psi_k| \geq \beta_k \left| \bar{\phi}_k^T \tilde{\theta}_{k-1} + \varepsilon_k \right| \quad (61)$$

由式 (10) 和式 (60) 可知, $\psi_k [\bar{\phi}_k^T \tilde{\theta}_{k-1} + \varepsilon_k] \geq 0$, 再根据式 (61) 和基本不等式, 存在常数 $b > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{k=k_0}^n \beta_k \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k \right] \psi_k \leq \\ & -2 \sum_{k=k_0}^n \beta_k^2 \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k \right]^2 \leq \\ & \left(\frac{2}{b} - 2 \right) \sum_{k=k_0}^n \beta_k^2 \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k \right]^2 + (2b - 2) \sum_{k=k_0}^{n-1} \beta_k^2 \varepsilon_k^2 \end{aligned} \quad (62)$$

由此可知

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k \psi_k \leq \\ & \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k \right]^2 + \\ & (b - 1) \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 \varepsilon_k^2 + \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \psi_k \varepsilon_k \end{aligned} \quad (63)$$

根据 β_k 的定义可知

$$a_k \beta_k \bar{g}_k \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k \leq \frac{1}{2} \quad (64)$$

由上式和式 (61), 可得

$$\begin{aligned} & - [\beta_k - a_k \beta_k^2 \bar{g}_k \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k] \times [\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k] \psi_k \leq \\ & - \frac{1}{2} \beta_k \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k \right] \psi_k \leq \\ & - \frac{\beta_k^2}{2} \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k \right]^2 \end{aligned} \quad (65)$$

注意到 $\psi_k^2 \leq \bar{g}_k \psi_k [\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k]$, 由式 (65) 和基本不等式可知, 存在常数 $c > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \psi_k \tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \\ & \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \psi_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k \leq \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k \right]^2 + \\ & \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \psi_k \varepsilon_k \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_0}^n \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2} \right) \mu_k^{-1} \beta_k^2 \left[\tilde{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k \right]^2 - \\ & \sum_{k=k_0}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{4} \right) \mu_k^{-1} \beta_k^2 \varepsilon_k^2 + \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \psi_k \varepsilon_k \end{aligned} \quad (66)$$

由式 (11)、(22) 和 (18) 可知

$$\sum_{k=k_0}^n \varepsilon_k^2 = O \left(\sum_{k=k_0}^n \delta_k \right) = O(\Delta_n), \quad \text{a.s.} \quad (67)$$

$$\sum_{k=k_0}^n \psi_k \varepsilon_k = O \left(\alpha_n \sum_{k=k_0}^n \delta_k^{\frac{1}{2}} \right) = O(\alpha_n \Delta_n), \quad \text{a.s.} \quad (68)$$

下面根据归纳假设证明

$$P_n^{-1} = I_{p_n} + \sum_{k=1}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 \tilde{\phi}_k(n) \tilde{\phi}_k^T(n) \quad (69)$$

假设对于 $n-1 \geq 0$ 结论成立, 根据式 (33) 中 $\tilde{\phi}_k(n)$ 的定义可知 $\tilde{\phi}_n(n) = \phi_n$, 再结合式 (51) 可知

$$\begin{aligned} & P_n^{-1} = I_{\{p_n=p_{n-1}\}} P_{n-1}^{-1} + \\ & I_{\{p_n > p_{n-1}\}} P_{n-1}^{\dagger-1} + \mu_n^{-1} \beta_n^2 \phi_n \phi_n^T = \\ & I_{\{p_n=p_{n-1}\}} \left\{ I_{p_{n-1}} + \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^{-1} \beta_k^2 \tilde{\phi}_k(n-1) \tilde{\phi}_k^T(n-1) + \mu_n^{-1} \beta_n^2 \phi_n \phi_n^T \right\} + \\ & I_{\{p_n > p_{n-1}\}} \left\{ I_{p_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^{-1} \beta_k^2 \tilde{\phi}_k(n) \tilde{\phi}_k^T(n) + \right. \\ & \left. \mu_n^{-1} \beta_n^2 \phi_n \phi_n^T \right\} = I_{p_n} + \sum_{k=1}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 \tilde{\phi}_k(n) \tilde{\phi}_k^T(n) \end{aligned} \quad (70)$$

式 (69) 得证. 根据式 (51) 可知, 当 $p_k = p_{k-1}$ 时,

$$\begin{aligned} & |P_k^{-1}| = |P_{k-1}^{-1}| |I + \mu_k^{-1} \beta_k^2 P_{k-1} \phi_k \phi_k^T| = \\ & |P_{k-1}^{-1}| (1 + \mu_k^{-1} \beta_k^2 \phi_k^T P_{k-1} \phi_k) \end{aligned} \quad (71)$$

因此, 当 $p_k = p_{k-1}$ 时,

$$\mu_k^{-1} \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k = \frac{|P_k^{-1}| - |P_{k-1}^{-1}|}{|P_{k-1}^{-1}|} \quad (72)$$

同理可证, 当 $p_k > p_{k-1}$ 时,

$$\mu_k^{-1} \beta_k^2 \left[\bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k + \|\bar{\phi}_k\|^2 \right] = \frac{|P_k^{-1}| - |P_{k-1}^{\dagger-1}|}{|P_{k-1}^{\dagger-1}|} \quad (73)$$

注意到 $|P_{k-1}^{\dagger-1}| = |P_{k-1}^{-1}|$, 结合以上两式及式 (69), 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n a_k \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k &= O\left(\sum_{k=k_0}^n \frac{|P_k^{-1}| - |P_{k-1}^{-1}|}{|P_k^{-1}|}\right) = \\ &= O\left(\int_{|P_{k_0}^{-1}|}^{|P_n^{-1}|} \frac{1}{x} dx\right) = O(p_n \log(np_n)) = O(p_n \log n) \end{aligned} \quad (74)$$

又由 a_k 的定义可知 $a_k \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k < 1$ 对于任意的 $k > 1$ 均成立, 结合式 (74), 可得

$$\sum_{k=k_0}^n [a_k \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k]^2 = O(p_n \log n) \quad (75)$$

接下来, 分别对式 (56) 中的噪声求和项进行估计. 根据 w_{k+1} 的定义可知, 对于任意的 $k > 0$,

$$E(w_{k+1} | \mathcal{F}_k) = 0 \quad (76)$$

由此可知, $\{w_k, \mathcal{F}_k\}$ 为一鞅差序列. 此外, 由式 (6) 可知, $|S_k(\Theta^T \Phi_k + v_{k+1}) - S_k(\Theta^T \Phi_k)| \leq |v_{k+1}| + 2c$, 由此及式 (7)、基本不等式以及施瓦茨不等式, 得到

$$\begin{aligned} E[|w_{k+1}|^4 | \mathcal{F}_k] &= \\ &= O\left(E[|S_k(\Theta^T \Phi_k + v_{k+1}) - S_k(\Theta^T \Phi_k)|^4 | \mathcal{F}_k]\right) = \\ &= O\left(E[|v_{k+1}|^4 | \mathcal{F}_k]\right) + O(1) = O(1), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (77)$$

因此, 由式 (76) 和式 (77) 以及引理 1 可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k w_{k+1} &= \\ &= o\left(\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k]^2\right) + O(1), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (78)$$

此外, 利用文献 [29] 中引理 3.4 的类似推导, 由式 (74) ~ (77) 以及引理 1, 可知

$$\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k w_{k+1}^2 = O(p_n \log n), \quad \text{a.s.} \quad (79)$$

注意到 $\psi_k^2 \leq \bar{g}_k^2 [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k]^2$, 根据式 (64) 并再次利用引理 1, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k \psi_k w_{k+1} &= \\ &= o\left(\sum_{k=k_0}^n [\mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \psi_k \bar{\phi}_k^T P_{k-1} \bar{\phi}_k]^2\right) + O(1) = \\ &= o\left(\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k]^2\right) + o\left(\sum_{k=k_0}^n \beta_k^2 \varepsilon_k^2\right) + O(1), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (80)$$

下面分析式 (59) 中求和项 $\sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \xi_k$. 根据 ψ_k 的定义、 $\|\theta\|_1 = O(1)$ 以及 β_k , $u_{k,i}$ 和 μ_k^{-1} 的有界性, 依次有

$$\sum_{k=k_0}^n \|\bar{\theta}(k)\|^2 I_{\{p_k > p_{k-1}\}} = O(p_n) \quad (81)$$

$$\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\bar{\theta}^T(k) \bar{\phi}_k]^2 I_{\{p_k > p_{k-1}\}} = O(p_n) \quad (82)$$

$$\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k \bar{\theta}^T(k) \bar{\phi}_k \psi_k I_{\{p_k > p_{k-1}\}} = O(\alpha_n p_n) \quad (83)$$

注意到, 当 $p_k > p_{k-1}$ 时, $a_k \beta_k^2 \|\bar{\phi}_k\|^2 \leq (|P_k^{-1}| - |P_{k-1}^{-1}|)/|P_k^{-1}| \leq 1$ 且 $a_k \beta_k \bar{g}_k \|\bar{\phi}_k\|^2 \leq 1/2$. 类似于式 (74) 以及式 (78) ~ (80) 的分析, 且根据式 (82), 有以下估计:

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \mu_k^{-1} \beta_k \bar{\theta}^T(k) \bar{\phi}_k w_{k+1} &= \\ &= o\left(\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\bar{\theta}^T(k) \bar{\phi}_k]^2 I_{\{p_k > p_{k-1}\}}\right) + O(1) = \\ &= o(p_n), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \|\bar{\phi}_k\|^2 w_{k+1}^2 &= \\ &= O(p_n \log n), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \|\bar{\phi}_k\|^2 \psi_k w_{k+1} &= \\ &= o\left(\sum_{k=k_0}^n \mu_k^{-1} \beta_k^2 [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k]^2\right) + o\left(\sum_{k=k_0}^n \beta_k^2 \varepsilon_k^2\right) + O(1), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (86)$$

此外, 根据式 (11)、(22) 和 (67), 并结合当 $p_k > p_{k-1}$ 时所满足的不等式 $\psi_k^2 \leq \bar{g}_k^2 [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k]^2$ 与 $a_k \beta_k \bar{g}_k \|\bar{\phi}_k\|^2 \leq 1/2$, 再考虑到 $\bar{g}_k$ 与 β_k 均为有界量, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \|\bar{\phi}_k\|^2 \psi_k^2 &\leq \\ &\leq \sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \mu_k^{-1} a_k \beta_k^2 \|\bar{\phi}_k\|^2 \bar{g}_k^2 [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k + \varepsilon_k]^2 = \\ &= o\left(\sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} [\bar{\theta}_{k-1}^T \bar{\phi}_k]^2\right) + \\ &+ o\left(\sum_{k=k_0}^n I_{\{p_k > p_{k-1}\}} \varepsilon_k^2\right) = O(\alpha_n^2 p_n) \end{aligned} \quad (87)$$

将式 (63)、(66) ~ (68)、(78) ~ (80) 以及式 (81) ~ (87) 替换到式 (59) 中, 并取 b, c, d 适当大, 使得 $\gamma = 1/b + 1/c + 1/d \in (0, 1/2)$, 最终得到引理 2 成立. $\square$

4.2 定理 1 的证明

证明. 注意到 $\lambda_{\min}\{P_n^{-1}\}\|\tilde{\theta}_n\|^2 \leq \tilde{\theta}_n^T P_n^{-1} \tilde{\theta}_n$, 由此以及引理 2 可知

$$\|\theta(n) - \hat{\theta}_n\|^2 = O\left(\frac{p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n}{\lambda_{\min}\{P_n^{-1}\}}\right), \text{ a.s.} \quad (88)$$

结合式 (16)、(19)、(21) 和 (88), 可得

$$\|\Theta - \hat{\Theta}_n\|_2^2 \leq \|\theta(n) - \hat{\theta}_n\|^2 + \delta_{n+1} = O\left(\frac{p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n}{\lambda_{\min}\{P_n^{-1}\}}\right), \text{ a.s.} \quad (89)$$

其中, 由于 $\Delta_n \geq \delta_n^{\frac{1}{2}} n$ 以及 $\lambda_{\min}\{P_n^{-1}\} = O(n)$, 因此式 (89) 中最后的等式成立.

注意到, 由式 (22)、(30) 和 (50) 可得, 存在常数 $c_0 > 0$, 使得

$$\beta_k \geq g_k(d_k^2) \geq g_k(0)\alpha_k^{-1} \geq c_0 p_k^{-1} \alpha_k^{-1} \quad (90)$$

结合上式以及式 (69) 和式 (89), 得证. $\square$

4.3 推论 1 的证明

证明. 当 $p_n = c_1 \lfloor \log(n+e) \rfloor$, $c_1 > 0$ 充分大, $|b_i| = O(\lambda^i)$, $i \geq 0$, $0 < \lambda < 1$ 时,

$$\Delta_n = O\left(\sum_{k=1}^n \lambda^{p_{k-1}}\right) = O(1) \quad (91)$$

当 $p_n = c_2 \lfloor n^\alpha \rfloor$, $|b_i| = O(i^{-a})$, $a > (1+\alpha)/\alpha$ 时, 注意到

$$\delta_k^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=p_{k-1}+1}^{\infty} \int_{i-1}^i \frac{dx}{i^a} \leq \int_{p_{k-1}}^{\infty} \frac{dx}{x^a} = O\left(\frac{1}{p_{k-1}^{a-1}}\right) \quad (92)$$

由上式可得

$$\Delta_n = O\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha(a-1)}}\right) = O(1) \quad (93)$$

根据式 (91) 和式 (93), 并结合推论 1 的条件, 可证得式 (31) 成立. $\square$

4.4 定理 2 的证明

证明. 结合式 (67) 和式 (90)、微分中值定理以及引理 2, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n R_k^{(1)} &= O\left(\sum_{k=0}^n R_k^{(2)}\right) = \\ &O\left(\sum_{k=0}^n [\tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\phi}_k]^2\right) + O\left(\sum_{k=0}^n \varepsilon_k^2\right) = \\ &O(p_n^2 \alpha_n^2 [p_n \log n + \alpha_n^2 p_n + \alpha_n \Delta_n]), \text{ a.s.} \quad (94) \end{aligned}$$

$\square$

5 司法量刑实验

本节基于中国裁判文书网¹所采集的真实故意伤害罪判决书数据集, 开展司法量刑预测实验. 该数据集包含 2019 年—2024 年 87 587 份轻伤案件判决书以及 9 228 份重伤案件判决书. 上述数据经过结构化预处理后, 可基于饱和观测下的机理模型进行量刑预测^[14-15]. 此处针对量刑预测任务开展实验的主要原因是司法判决符合饱和输出观测的特征, 即宣告刑存在明确的法定刑区间上下界规定. 根据《中华人民共和国刑法》第 234 条规定, 轻伤案件判处有期徒刑 6 个月至 3 年, 重伤案件判处有期徒刑 3 至 10 年. 对应于式 (2), 轻伤案件和重伤案件的饱和函数上下界分别为 $L_k \equiv l_k \equiv 6$, $N_k \equiv n_k \equiv 36$ 以及 $L_k \equiv l_k \equiv 36$, $N_k \equiv n_k \equiv 120$ (单位: 月). 此外, 鉴于法律条文会随时间进行修订调整, 且类案推送机制在全国范围内推广适用, 司法判决数据在时间与空间维度上呈现出显著的相关性. 因此, 本文所采用的一般数据条件更能贴近司法判决数据的实际统计特性.

本文考虑如下的量刑机理模型^[15]:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= S_k \left(\left[a_k + b x_k^{(1)} + c x_k^{(2)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^{m_1} (1 + p_i z_k^{(i)}) \times \right. \\ &\quad \left. \left[1 + \sum_{j=1}^{m_2} q_j u_k^{(j)} + e \right] + w_{k+1} \right) \quad (95) \end{aligned}$$

模型的构建依据及各变量的具体含义详见文献 [15], 本文实验中, $m_1 = 13$, $m_2 = 22$, 由此定义如下扩展回归向量及参数向量, 其维度分别为 $2^{m_1}(3 + 3m_2)$:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= [a_k \phi_{1k}^T, x_k^{(1)} \phi_{1k}^T, x_k^{(2)} \phi_{1k}^T, a_k (\phi_{1k} \otimes \phi_{2k})^T, \\ &\quad x_k^{(1)} (\phi_{1k} \otimes \phi_{2k})^T, x_k^{(2)} (\phi_{1k} \otimes \phi_{2k})^T]^T \quad (96) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta &= [(1+e)\vartheta_1^T, b(1+e)\vartheta_1^T, c(1+e)\vartheta_1^T, (\vartheta_1 \otimes \vartheta_2)^T, \\ &\quad b(\vartheta_1 \otimes \vartheta_2)^T, c(\vartheta_1 \otimes \vartheta_2)^T]^T \quad (97) \end{aligned}$$

¹ 见 <https://wenshu.court.gov.cn/>

其中

$$\phi_{1k} = [1, z_k^{(1)}, \dots, z_k^{(m_1)}, z_k^{(1)} z_k^{(2)}, \dots, z_k^{(m_1-1)} z_k^{(m_1)}, \dots, z_k^{(1)} \dots z_k^{(m_1)}]^T \quad (98)$$

$$\phi_{2k} = [u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(m_2)}]^T \quad (99)$$

$$\vartheta_1 = [1, p_1, \dots, p_{m_1}, p_1 p_2, \dots, p_{m_1-1} p_{m_1}, \dots, p_1 \dots p_{m_1}]^T \quad (100)$$

$$\vartheta_2 = [q_1, \dots, q_{m_2}]^T \quad (101)$$

则饱和函数 $S_k(\cdot)$ 的内部结构转化为线性参数化的高维随机回归模型, 即模型 (95) 转化为模型 (5) 的形式, 因此可通过算法 (27) ~ (30) 对其进行优化.

本文采用相对误差衡量量刑预测效果, 精度指标的具体定义如下:

$$RAD = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{z}_k}{z_k} I(\tilde{z}_k > \max\{20\% z_k, 2\}) \quad (102)$$

其中, $\tilde{z}_k = |z_k - \hat{z}_k|$, 这里 z_k 表示第 k 个司法案件的实际判决刑期, $\hat{z}_k$ 为其对应的预测值, n 为总判决数据量. 阈值项 $\max\{20\% z_k, 2\}$ 反映法官在量刑过程中的自由裁量权, 其中 $20\% z_k$ 基于我国《量刑指导意见》² 中的裁量标准; “2”来源于与一线法官以及检察官的访谈结果, 体现实办案中的经验性判断. 相较于已有研究中普遍采用的传统预测精度指标, 如文献 [35] 等中的分类指标, 式 (102) 所定义的 RAD 指标能够提供更加细致且合理的量刑预测性能评估.

针对算法的部分超参数设置, 模型 (95) 中量刑起点 a_k 设置为法律所规定量刑起点区间的下界, 该设定依据一系列的对照实验所得^[14]. 另外, 取 $p_k = \lfloor \log(k+80)^{3.4} \rfloor$. 初始值 $\hat{\theta}_0 = [0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^{p_0}$, 初始矩阵取为 $P_0 = I \in \mathbf{R}^{p_0 \times p_0}$. $\beta_k = 0.1$ 且 $\mu_k = 25$. 假设随机噪声 v_k 为服从正态分布 $N(0, 25)$ 的独立同分布序列, 函数 $G_k(\cdot)$ 可根据式 (9) 计算得到. 此外, 尽管式 (97) 中待估的参数向量维数较高但仍为有限维, 且根据我国《量刑指导意见》的规定, 各种特征要素对量刑结果的调节作用具有法定上界, 即未知的参数向量范数具有先验上界, 因此这里采用式 (23) 所定义的有界投影方式, 这也更加符合法律规定. 具体而言, 特征因素“重伤人数”和“轻伤人数”对应参数的投影区间分别为 $[0, 20]$ 和 $[0, 5]$; 增刑和减刑特征因素对应参数的投影区间分别为 $[-0.1, 1]$ 和 $[-1, 0.1]$.

为验证第 2 节中提出的在线扩展型自适应学习算法 (27) ~ (30) 的有效性, 本文采用该算法对模

型 (95) 进行学习和预测. 考虑到扩展后的未知参数向量维度较高, 且尾部分量多为高阶交叉项, 对量刑精度的贡献应该有限. 为兼顾预测性能与计算效率, 本文通过分析预测精度随参数规模的变化趋势, 选取合适的参数规模. 图 1 和图 2 分别展示了在轻伤案件和重伤案件中, 平均量刑预测精度随未知参数向量维度增加的变化趋势; 图 3 和图 4 则分别展示了式 (40) 中定义的平均预测“遗憾”随着未知参数向量维度增加的变化趋势. 可以看出, 两类情形下的平均预测精度均随参数规模增加呈现上升趋势; 平均预测“遗憾”则随着参数规模的增加分别呈现下降趋势, 验证了所提出算法的良好预测性能. 此外, 可以看出, 随着参数规模增大, 预测精度的提升幅度较为缓慢, 表明预测性能会随着参数规模的增加逐渐趋于饱和, 最终分别达到 79.31% 和 93.28%. 因而, 在实际应用中可在预测精度与计算复杂度之间进行权衡, 合理选取参数维度以实现预测性能与

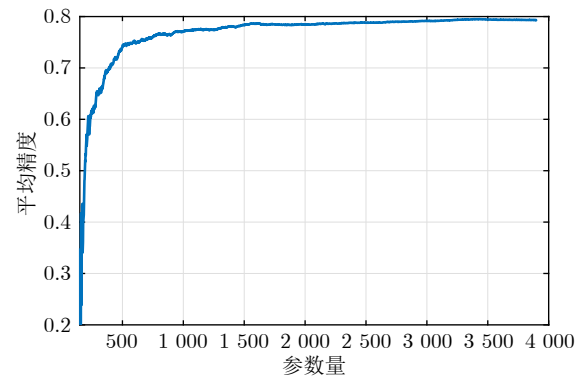


图 1 随着参数规模递增的轻伤案件平均预测精度趋势变化

Fig.1 The trend of average prediction accuracy for minor injury cases with increasing parameter size

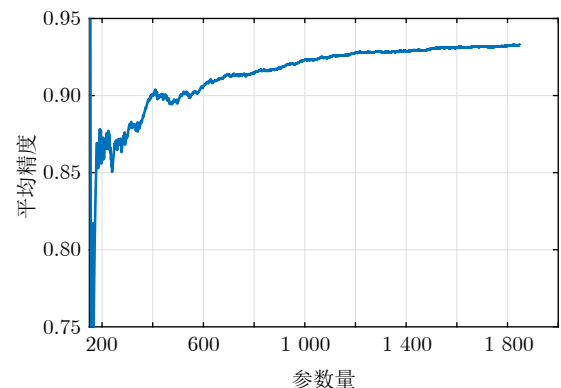


图 2 随着参数规模递增的重伤案件平均预测精度趋势变化

Fig.2 The trend of average prediction accuracy for serious injury cases with increasing parameter size

² 见 <https://www.court.gov.cn/>

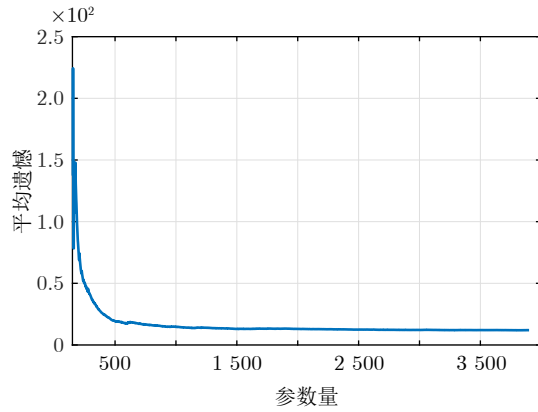


图3 随着参数规模递增的轻伤案件平均预测遗憾趋势变化

Fig.3 The trend of average prediction regret for minor injury cases with increasing parameter size

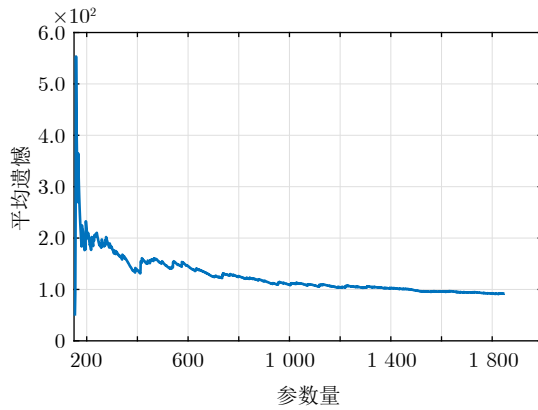


图4 随着参数规模递增的重伤案件平均预测遗憾趋势变化

Fig.4 The trend of average prediction regret for serious injury cases with increasing parameter size

资源消耗的平衡. 实验结果表明, 对于轻伤案件和重伤案件, 参数维度分别取 3000 与 1200 时已能获得较好的量刑预测效果.

上述方法不仅验证了本文所提出的在线扩展型算法的有效性, 也为量刑预测任务中的最优参量选取提供参考, 对大模型架构下的复杂度控制与泛化能力提升具有一定的实践启示.

进一步, 为验证自适应算法 (27) ~ (30) 的高效性, 本文选取部分重伤案件数据进行实验, 对比本文算法 (算法 1) 与文献 [31] 中的算法 (算法 2) 在计算效率与预测精度方面的表现. 图 5 的精度趋势图显示, 两种算法的性能相当, 均具备较高的预测精度, 但实际运算效率差异显著: 本文算法的运行时间仅为 95.22 s, 而文献 [31] 中算法需约 6121.72 s, 耗时约为本文算法的 64.29 倍. 事实上, 结合表 1 的

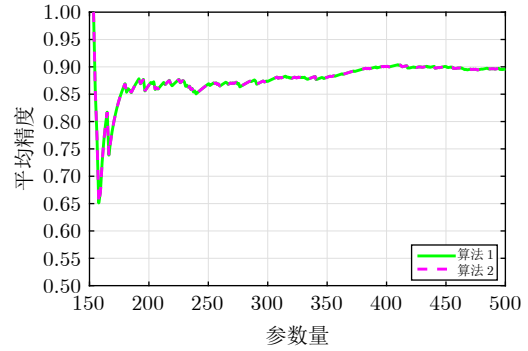


图5 算法 1 与算法 2^[31] 平均预测精度趋势对比 ($n = 500$)

Fig.5 The trend comparison of average prediction accuracy between Algorithm 1 and Algorithm 2^[31] ($n = 500$)

复杂度分析可知, 随着数据规模的扩大, 这一效率差距会更加显著. 这一结果充分表明, 本文算法在保证量刑预测精度的同时, 大幅降低了计算开销, 提升了运算效率. 这主要得益于算法在设计上的优化: 相较于传统机器学习方法及文献 [29–31] 中的算法, 本文算法实现了参数的在线更新与实时预测. 该特性不仅显著降低了对历史数据的存储需求, 还提升了在处理大规模数据时的计算速度与响应能力, 能够更好地满足各种应用场景中对高效在线学习的实际需求, 尤其适用于大规模高维数据场景下的建模与优化问题.

6 结束语

本文针对饱和观测下的大回归模型, 设计一种新的高效在线学习算法, 并在一般复杂数据条件下建立其自适应辨识与预测理论, 在保障学习精度的同时, 显著降低运算代价. 此外, 基于真实司法判决数据开展量刑预测实验. 通过分析预测精度随参数规模增长的变化趋势, 为量刑模型规模选取问题提供重要参考; 通过对比实验检验本文算法的计算效率和预测精度. 未来研究可进一步探讨更一般的非线性大参数模型 (如深度神经网络) 自适应学习的收敛性理论及参数规模选取问题; 同时, 也可在本文模型基础上进一步研究自适应控制系统的理论问题, 为相关具身智能系统的研究提供理论和方法基础.

References

- 1 Wei J, Tay Y, Bommasani R, Raffel C, Zoph B, Borgeaud S, et al. Emergent abilities of large language models. arXiv preprint arXiv: 2206.07682, 2022.
- 2 Zhao W X, Zhou K, Li J, Tang T, Wang X, Hou Y, et al. A survey of large language models. arXiv preprint arXiv: 2303.18223, 2023.
- 3 Guo Lei. Estimation, control, and games of dynamical systems with uncertainty. *Scientia Sinica Informationis*, 2020, **50**(9): 1327–1344 (郭雷. 不确定性动态系统的估计, 控制与博弈. 中国科学: 信息科学, 2020, **50**(9): 1327–1344)

- 4 Zhang L, Guo L. Adaptive tracking control with binary-valued output observations. arXiv preprint arXiv: 2411.05975, 2024.
- 5 Guo L. Feedback and uncertainty: Some basic problems and results. *Annual Reviews in Control*, 2020, **49**: 27–36
- 6 Yehudai G, Ohad S. Learning a single neuron with gradient methods. In: Proceedings of the Conference on Learning Theory. Virtual Event: PMLR, 2020. 3756–3786
- 7 Agarap A F. Deep learning using rectified linear units (ReLU). arXiv preprint arXiv: 1803.08375, 2018.
- 8 Shamir O. The implicit bias of benign overfitting. In: Proceedings of the Conference on Learning Theory (COLT). London, United Kingdom: PMLR, 2022. 448–478
- 9 Tobin J. Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica*, 1958, **26**(1): 24–36
- 10 Cook J, McDonald J. Partially adaptive estimation of interval censored regression models. *Computational Economics*, 2013, **42**: 119–131
- 11 Heckman J J. The common structure of statistical models of truncation, sample selection and limited dependent variables and a simple estimator for such models. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1976, **5**(4): 475–492
- 12 Clark T G, Bradburn M J, Love S B, Altman D G. Survival analysis part I: Basic concepts and first analyses. *British Journal of Cancer*, 2003, **89**(2): 232–238
- 13 Cleves M. *An Introduction to Survival Analysis Using Stata*. Stata Press, 2008.
- 14 Wang Fang, Zhang Lan-Tian, Guo Lei. Applications of nonlinear recursive identification theory in sentencing data analyses. *Scientia Sinica Informationis*, 2022, **52**(10): 1837–1852 (王芳, 张蓝天, 郭雷. 非线性递推辨识理论在量刑数据分析中的应用. 中国科学: 信息科学, 2022, **52**(10): 1837–1852)
- 15 Jin Y, Zheng X, Guo L. Adaptive sentencing prediction with guaranteed accuracy and legal interpretability. arXiv preprint arXiv: 2505.14011, 2025.
- 16 Wang L Y, Zhang J F, Yin G G. System identification using binary sensors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**: 1892–1907
- 17 Jafari K, Juillard J, Roger M. Convergence analysis of an online approach to parameter estimation problems based on binary observations. *Automatica*, 2012, **48**: 2837–2842
- 18 Guo J, Zhao Y. Recursive projection algorithm on FIR system identification with binary-valued observations. *Automatica*, 2013, **49**: 3396–3401
- 19 Wang Y, Zhao Y, Zhang J F, Guo J. A unified identification algorithm of FIR systems based on binary observations with time-varying thresholds. *Automatica*, 2022, **135**: Article No. 109990
- 20 Bercu B, Godichon A, Portier B. An efficient stochastic Newton algorithm for parameter estimation in logistic regressions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, **58**: 348–367
- 21 Zhang L, Zhao Y, Guo L. Identification and adaptation with binary-valued observations under non-persistent excitation condition. *Automatica*, 2022, **138**: Article No. 110158
- 22 Zhang L, Guo L. Adaptive identification with guaranteed performance under saturated observation and nonpersistent excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **69**(3): 1584–1599
- 23 Zhao W X, Chen H F. Markov chain approach to identifying Wiener systems. *Science China Information Sciences*, 2012, **55**: 1201–1217
- 24 Dai R, Guo L. Estimation of IIR systems with binary-valued observations. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 2023, **44**(5): 687–702
- 25 Lai T L, Wei C Z. Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems. *The Annals of Statistics*, 1982, **10**(1): 154–166
- 26 Hannan E J, Deistler M. *The Statistical Theory of Linear Systems*. New York: Wiley, 1988.
- 27 Wahlberg B, Ljung L. Hard frequency-domain model error bounds from least-squares like identification techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(7): 900–912
- 28 Chen H F, Guo L. *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Boston: Birkhäuser, 1991.
- 29 Guo L, Huang D W, Hannan E J. On $ARX(\infty)$ approximation. *Journal of Multivariate Analysis*, 1990, **32**(1): 17–47
- 30 Huang D, Guo L. Estimation of nonstationary ARMAX models based on the Hannan-Rissanen method. *The Annals of Statistics*, 1990, **18**(4): 1729–1756
- 31 Dai R, Guo L. Estimation and prediction for large models with saturated output observation and general input condition. *Automatica*, 2025, **177**: Article No. 112321
- 32 Guo L. Convergence and logarithm laws of self-tuning regulators. *Automatica*, 1995, **31**(3): 435–450
- 33 Cheney E W. *Analysis for Applied Mathematics*. New York: Springer, 2001.
- 34 Lai T L. Asymptotically efficient adaptive control in stochastic regression models. *Advances in Applied Mathematics*, 1986, **7**(1): 23–45
- 35 Kim Y. Convolutional neural networks for sentence classification. In: Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. Doha, Qatar: ACL, 2014. 1746–1751



戴瑞芬 山东大学数据科学研究院博士研究生. 主要研究方向为非线性随机系统的学习与控制及其在法律人工智能中的应用.

E-mail: dairuifen@mail.sdu.edu.cn

(**DAI Rui-Fen** Ph.D. candidate at the Data Science Institute, Shandong University. Her research interest covers learning and control of nonlinear stochastic systems, and their applications in legal artificial intelligence.)



王芳 山东大学数据科学研究院教授. 主要研究方向为计算法学, 数据科学, 复杂社会系统管理.

E-mail: wangfang226@sdu.edu.cn

(**WANG Fang** Professor at the Data Science Institute, Shandong University. Her research interest covers computational law, data science, and management of complex social systems.)



郭雷 中国科学院院士, 中国科学院数学与系统科学研究院研究员. 主要研究方向为系统与控制科学, 特别是自适应与不确定性动态系统的学习、滤波、控制与博弈. 本文通信作者.

E-mail: lguo@amss.ac.cn

(**GUO Lei** Academician of the Chinese Academy of Sciences (CAS), professor at the Academy of Mathematics and Systems Science, CAS. His research interest covers systems and control science, particularly the learning, filtering, control, and game theory of adaptive and uncertain dynamic systems. Corresponding author of this paper.)